UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE .... D.N.I. N.º ....

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO .... N.º DE MATRÍCULA .... FECHA ....

PROB. 1 $f(x,y) = y^4 - 4xy + 2x^2 - 4$

$$\begin{cases} f'_x = -4y + 4x = 0 \Rightarrow x = y \\ f'_y = 4y^3 - 4x = 0 \Longrightarrow 4y^3 - 4y = 0 \Rightarrow y^3 - y = 0 \end{cases}$$

$$y(y^2-1) = 0$$

$y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (0,0)$

$y = 1 \Rightarrow x = 1 \quad (1,1)$

$y = -1 \Rightarrow x = -1 \quad (-1,-1)$

PTOS CRÍTICOS: $\boxed{(0,0,-4),\ (1,1,-5),\ (-1,-1,-5)}$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 48y^2 - 16$$

$H(0,0) = -16 < 0 \ \wedge \ 4 > 0$ en $(0,0)$ hay PTO. de SILLA

$H(1,1) = 48 - 16 = 32 > 0 \ \wedge \ 4 > 0$ en $(-1,-1)$ hay MÍNIMO

$H(-1,-1) = 48 - 16 = 32 > 0 \ \wedge \ 4 > 0$ en $(1,1)$ hay MÍNIMO

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE .... D.N.I. N.º ....

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO .... N.º DE MATRÍCULA .... FECHA ....

PROB. 2 $\quad f(x,y) = x^2 y \quad \boxed{y>0}$

$h(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3 = 0$

$\nabla f = (2xy, x^2) \qquad \nabla h = (4x, 2y)$

$$\begin{cases} 2xy = \lambda 4x \Rightarrow xy = 2\lambda x \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} y = 2\lambda \\ x^2 = 2\lambda y \Rightarrow x^2 = 2\lambda y \longrightarrow x^2 = 4\lambda^2 \\ 2x^2 + y^2 = 3 \longrightarrow 8\lambda^2 + 4\lambda^2 = 3 \Rightarrow 12\lambda^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda^2 = \frac{1}{4} \\ \lambda = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Entonces: Si $\lambda = \frac{1}{2}$, $y = 1 \wedge x^2 = 1$
$x = \pm 1$

Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, $y = -1 \wedge x^2 = 1$, $x = \pm 1$ } quedan fuera pues $y > 0$

Por tanto, los "candidatos" a ser extr. condicionados son:

Si $x \neq 0$, $(1,1)$, $(-1,1)$

Si $x = 0$, $(0, \sqrt{3})$ $\quad (0, -\sqrt{3})$ NO pq $y>0$ es la condición

$f(1,1) = (1)^2 \cdot 1 = 1$ en $(1,1)$ hay MÁXIMO COND

$f(-1,1) = (-1)^2 \cdot 1 = 1$ en $(-1,1)$ hay MÁXIMO COND

$f(0, \sqrt{3}) = 0$ en $(0, \sqrt{3})$ hay MÍNIMO COND.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

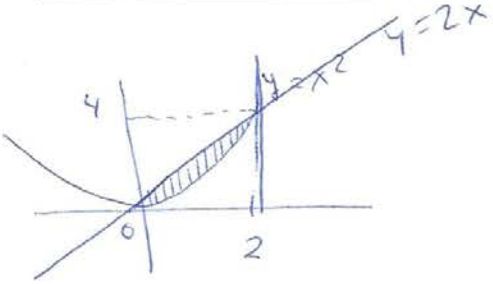
NOMBRE .... D.N.I. N.º ....

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO .... N.º DE MATRÍCULA .... FECHA ....

PROB. 3

a)



b) $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\, dy\, dx =$

$$\int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (4x+2)\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(4xy+2y\right]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 (8x^2+4x-4x^3-2x^2)\, dx = \int_0^2 (-4x^3+6x^2+4x)\, dx$$

$$= \left(-4\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = \left(-x^4+2x^3+2x^2\right]_0^2 =$$

$$= -16+16+8 = \boxed{8}$$

c) $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)\, dx\, dy$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE .... D.N.I. N.º ....

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO .... N.º DE MATRÍCULA .... FECHA ....

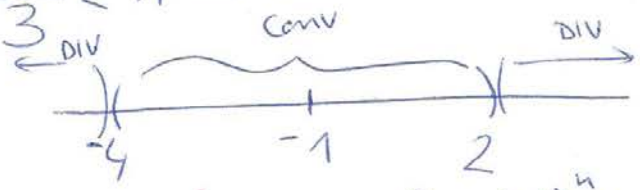
PROB. 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}(x+1)^n$$

$$\lim_n \left| \frac{\frac{(n+1)}{3^{n+1}}(x+1)^{n+1}}{\frac{n}{3^n}(x+1)^n} \right| = \lim_n \left| \frac{(n+1)(x+1)^{n+1} 3^n}{n(x+1)^n 3^{n+1}} \right| =$$

$$= \lim_n \left| \frac{(n+1)(x+1)}{3n} \right| = |x+1| \lim_n \frac{n+1}{3n} =$$

$$= |x+1| \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow |x+1| < 3 \Rightarrow -3 < x+1 < 3$$



Si $x=-4$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}(-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$ DIV

Como $\lim_n ((-1)^n n) \neq 0$

Si $x=2$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} 3^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$ DIV

$\lim_n n \neq 0$

INT. de CONV. es $(-4, 2)$

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE .... D.N.I. N.º ....

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO .... N.º DE MATRÍCULA .... FECHA ....

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

PROB. 5 $\mathcal{U} = L(\{(1,2,1),(0,1,1)\})$

a) $\underline{v}_1 = (1,2,1)$

$\underline{v}_2 = (0,1,1) + \alpha(1,2,1)$

$0 = \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = (1,2,1)\cdot(0,1,1) + \alpha(1,2,1)\cdot(1,2,1) =$

$= (0+2+1) + \alpha(1+4+1) = 3 + 6\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{6} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

Por tanto, base ortogonal de $\mathcal{U}$: $\{(1,2,1), (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\}$

Veamos si son unitarios:

$\|(1,2,1)\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \Rightarrow \underline{w}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ es UNIT.

$\|(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\| = \sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{w}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es UNIT.

Base ORTONORMAL de $\mathcal{U}$ es: $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

b) $\underline{v}_u = (\alpha, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta)$

$(1,0,1) - (\alpha, 2\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (1-\alpha, -2\alpha-\beta, 1-\alpha-\beta) \perp \begin{cases}(1,2,1)\\(0,1,1)\end{cases}$

$\begin{cases} 1-\alpha-4\alpha-2\beta+1-\alpha-\beta = 0 \iff -6\alpha-3\beta+2=0 \\ -2\alpha-\beta+1-\alpha-\beta = 0 \iff -3\alpha-2\beta+1=0 \end{cases}$

$\left\{\begin{array}{cc|c} -6 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{array}\right\} \sim \left\{\begin{array}{cc|c} -6 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = 0 \end{array}$

Luego, la proy. ortogonal de $\underline{v}$ es: $\boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS

NOMBRE D.N.I. N.º

ASIGNATURA GRUPO

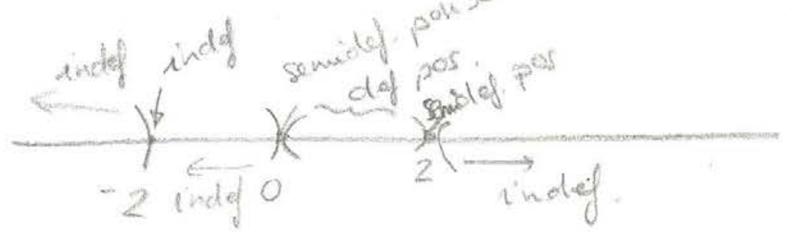
CURSO N.º DE MATRÍCULA FECHA

f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) -El nº de reales positivos y reales negativos en la diagonal principal es el mismo y el rango tb.
-Los valores de la diagonal principal pueden ser distintos.

h) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{0 < \alpha < 2}$

(*)



$\forall \alpha \in [(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)]$ q es indef.

$\forall \alpha \in (0,2)$ q es def. positiva

$\boxed{\alpha = 2 \vee \alpha = 0}$ q es semidef positiva

c) $(a,b,c)\cdot(1,2,1)=0 \iff a+2b+c=0 \iff a=c$

$(a,b,c)\circ(0,1,1)=0 \iff \quad b+c=0 \iff b=-c$

$U^\perp = \{(c,-c,c) \mid c\in\mathbb{R}\} = \underbrace{L(\{(1,-1,1)\})}$

<u>PROB. 6</u> $\quad q(x,y,z) = 2x^2+\alpha y^2+2\alpha xz+2z^2$

a) $M_q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $f_q(\underline{x},\underline{y}) = 2x_1y_1+\alpha x_2y_2+2x_3y_3+\alpha x_1y_3+\alpha x_3y_1$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha^2+8 \end{pmatrix}$

$2\alpha^2=8 \iff \alpha^2=4 \iff \boxed{\alpha=\pm 2}$

<u>CASOS</u>. i) si $\alpha<-2$, $\quad q$ es indef.

ii) si $\alpha=-2$, $\quad q$ es indef.

iii) si $-2<\alpha<0$ $\quad q$ es indef.

iv) si $\alpha=0$ $\quad q$ es semidef. posit.

v) si $0<\alpha<2$ $\quad q$ es def. pos.

vi) si $\alpha=2$ $\quad q$ es semidef. pos.

vii) si $2<\alpha$ $\quad q$ es indef. $\quad$ Ver (*) al final

d) si $\alpha=-2$, $\quad sig(q)=(1,1)$, $rg(q)=2$

e) si $\alpha=2$, $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\underbrace{B=\{(1,0,0),(0,1,0),(-1,0,1)\}}$ $\quad M_q(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$